BÀI THƠ, BÀI VÈ, MẸO HỌC NHANH CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Mẫn Tiệp sưu tầm*

2013

Tóm tắt nội dung

Bộ sưu tập một số mẹo học nhanh công thức Lượng Giác bằng cách sử dụng nghệ thuật thơ dân gian.

Mục lục

*Hội trưởng Hội Học sinh Long Mỹ (Hậu Giang); email: mvphuo@gmail.com

1 Bài thơ, bài vè, mẹo học nhanh công thức lượng giác

1.1 Định nghĩa giá trị lượng giác (LG)

$$\sin = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}},$$
$$\cos = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}},$$
$$\tan = \frac{\text{đối}}{\text{kề}},$$
$$\cot = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}.$$

Sao đi học (sin = đối/ huyền)
Cứ khóc hoài (cos = kề/ huyền)
Thôi đừng khóc (tan = đối/ kề)
Có kẹo đây (cot = kề/ đối)

Hoặc:

Tìm sin lấy đối chia huyền
Cosin lấy cạnh kề, huyền chia nhau.
Còn tang ta tính như sau:
Đối trên, kề dưới chia nhau ra liền.
Cotang cũng dễ ăn tiền,
Kề trên, đối dưới chia liền là ra.

1.2 Giá trị LG thông dụng

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sin 3 cos 6: nửa phần
Cos 3 sin 6: nửa phần căn ba

1.3 Tính chất

1.3.1 Cung liên kết

Cos đối:

$$\cos(-a) = \cos a.$$

Sin bù:

$$\sin(\pi - a) = \sin a.$$

Hơn kém pi tang:

$$\tan(\pi + a) = \tan a,$$
$$\cot(\pi + a) = \cot a.$$

Phụ chéo[1]:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a,$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a,$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a.$$

Hơn kém nửa pi thì: đối chéo[2].

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-a) = +\cos a.$$

1.3.2 Dấu

Ta gọi cung thứ I, II, III, IV lần lượt là các góc phần tư thứ I, II, III, IV (ngược chiều kim đồng hồ) của mặt phẳng tọa độ Oxy. Khi đó dấu của các hàm lượng giác sẽ tuân thủ theo quy luật sau:

Nhất đủ, nhì sin, tam tang, tứ cos.

Nghĩa là ở cung I thì sin, cos, tang[3] đều dương. Đối với cung II thì chỉ có sin là dương, còn cos hay tang thì đều âm ...

1.4 Công thức LG

1.4.1 Công thức cộng

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

[1]Hai góc phụ nhau thì sin góc này = cos góc kia, tan góc này = cot góc kia (và ngược lại).

[2]Đúng ra phải là "chéo *đổi*" mới đúng! Tức là đổi chéo cung sin thành cos, tan thành cot đồng thời *góc bên trong bị đổi dấu.*

[3]Cotang giống dấu của tang nên khỏi xét.

Sin thì sin cos cos sin
Cos thì cos cos sin sin "coi chừng" (dấu trừ).

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}.$$

Tang tổng thì lấy tổng tang
Chia một trừ với tích tang, ra liền.

Hoặc:

Tang thì tang cộng tang kia
Nhớ chia cho 1 mà trừ tang tang.

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$$

Cotang chớ có phiền hà
Tích cô trừ 1, mẫu là tổng cô[4].

1.4.2 Công thức biến tích thành tổng

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right],$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right],$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right].$$

Cos cos nửa cos-cộng, cộng cos-trừ
Sin sin nửa cos-trừ trừ cos-cộng
Sin cos nửa sin-cộng cộng sin-trừ.

Hoặc:

Nhớ rằng hiệu trước, tổng sau; một phần hai phải nhân vào
Sin sin, cos tổng lao xao dấu trừ[5]
Cos thì cos hết
Sin sin cos cos, sin cos sin sin.

$$\tan a \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}.$$

Tang ta nhân với tang mình, tổng tang chia tổng cotang thui mà.

[4]Chú ý: Công thức này chỉ áp dụng cho cotang của một *tổng* thôi.
[5]Dấu trừ phía trước $\cos(a+b)$ khi tính $\sin a \sin b$.

1.4.3 Công thức biến tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right],$$
$$\cos a - \cos b = -2\left[\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right],$$
$$\sin a + \sin b = 2\left[\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right],$$
$$\sin a - \sin b = 2\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right].$$

> Góc chia đôi: trước cộng, sau trừ
> Cos cộng cos là 2 cos cos
> Cos trừ cos trừ 2 sin sin
> Sin cộng sin là 2 sin cos
> Sin trừ sin là 2 cos sin.

$$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

> Tổng tang ta lấy sin tòng (sin của tổng)
> Chia cho cos cos khó lòng lại sai.

Hoặc:

> Tang ta cộng với tang mình
> Bằng sin hai đứa trên cos mình, cos ta.

$$\cos a \pm \sin b = \sqrt{2}\cos\left(a \mp \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\sin a \pm \cos b = \sqrt{2}\sin\left(a \pm \frac{\pi}{4}\right).$$

> Cos cộng sin bằng căn hai cos, của a trừ cho 4 dưới pi[6]
> Sin cộng cos bằng căn hai sin, của a cộng cho pi trên 4.

1.4.4 Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

[6] Trong công thức này, "tính theo cos dấu phải coi chừng".

Sin 3 thì *3 sin trừ 4 xỉn*,
Cos 3 thì *4 cổ trừ 3 cô*[7].

Hoặc:

Cos ra cos, sin ra sin;
Sin thì 3, 4; cos thì 4, 3.
Dấu trừ ở giữa phân ra
Lập phương chỗ bốn, thế là ok.

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}.$$

Ba tang trừ tang lập
Một trừ ba tang bình
Tang ba đứa chúng mình $(\tan 3a)$
Đã tường minh rồi đó!

1.4.5 Đẳng thức LG trong tam giác

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right),$$
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C,$$
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Tổng sin: bốn tích cos-chia[8].
Tổng sin-hai được: bốn-lần tích-sin.
Hai-lần tích-cos cộng hai,
Tổng bình-sin tức tổng thằng sin sin.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right),$$
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C,$$
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C.$$

Cos-một thì tích sin-chia,
Cos-hai, bình-cos tích cờ ót nhau.
(Cos-hai cùng với cos-bình
Cái nào vế phải cũng là cos nhân).[9]

[7] Từ nào có dấu hỏi là lũy thừa ba.
[8] "Cos chia" hay "Cos góc chia" thì *góc chia* ở đây là $\frac{A}{2}, \frac{B}{2} \dots$; còn *góc nguyên* là $A, B, \dots$
[9] Bài thơ trên chưa thể hiện hết vế phải của các công thức.

Riêng đẳng thức

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

ta còn có thể đọc là

Tổng bình ba cos ta ghi
Một trừ cho tích-cos thì nhân hai.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C,$$
$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right) = 1.$$

Tổng tang cũng giống tích tang (góc nguyên)
Tích tan từng cặp tổng bằng 1 thôi (góc chia).

1.4.6 Bốn công thức tổng quát hữu dụng:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \cos^2(a+b+c) = 2 + 2\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a),$$
$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2(a+b+c) = 2 - 2\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a).$$

Tổng bình cộng góc xoay vòng[10]
Nhân 2 phía trước, cộng vào số 2,
Nhưng mà sin phải sửa sai[11].

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2} \quad (1)$$
$$\sin a + \sin b + \sin c = +\sin(a+b+c) + 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2} \quad (2)$$

Trái cộng cos-tổng, phải thì sin[12]
Xong rồi cộng 4 hàm giữ nguyên
Góc bên vế phải xoay vòng cộng
Chia hai cái nữa thế là xong (là xong liền).

[10] $a+b, b+c, c+a$ gọi là cách “cộng xoay vòng”
[11] Công thức tổng bình của sin nhân với -2
[12] Công thức (1) thì vế trái cộng $\cos(a+b+c)$, công thức (2) thì vế phải cộng $\sin(a+b+c)$

2 Kết luận

Mặc dù các bài thơ không bao giờ là cách học công thức hiệu quả nhất, song những vần nhịp và sắc thái dân gian của nó cũng là một phương pháp ghi nhớ đáng để nghiên cứu và phát triển.

Bộ sưu tập xin tạm kết thúc ở đây, tác giả mong rằng sẽ tìm được nhiều bài thơ hay hơn nữa, nhằm giúp đỡ các em một phần trong việc học tập bộ môn Lượng Giác (nổi tiếng với rất nhiều công thức khó nhớ) này.

Tài liệu tham khảo

[1] Long Mỹ Học sinh Hội, *Bí kiếp học môn toán* (2010), THPT Long Mỹ, Hậu Giang.

[2] Facebook Hội Học sinh Long Mỹ:

www.facebook.com/pages/Long-Mỹ-Học-sinh-Hội/189503244530006